Université Joseph Fourier
UFR de Mathématiques

Master Mathématiques, Informatique
Année M1, majeure Mathématiques

Liste des sujets de TER 2010-2011

1. À la découverte des immeubles de Tits
2. Algèbres semi-simples
3. Courbes algébriques planes
4. Dénombrement des arbres couvrants
5. Files d'attente en temps discret
6. Forme d'une goutte d'eau
7. Géométrie des surfaces
8. Graphes aléatoires
9. Inégalités de concentration en estimation non-paramétrique
10. Introduction à la théorie ergodique
11. Localiser les racines d'un polynôme par des méthodes hybrides
12. Loi généralisée des valeurs extrêmes
13. Méthodes de dénombrement
14. Méthode de Laplace et méthode de la phase stationnaire
15. Modèle auto-régressif
16. Nombres de Bernoulli et formule d'Euler-Mac Laurin
17. Ondes progressives et systèmes de réaction-diffusion
18. Opérateur $\overline{\partial}$ dans $\mathbb{C}$
19. Permutations aléatoires
20. Phénomène d'extension de Hartogs
21. Problème de Galois inverse
22. Problème des moments
23. Processus de Poisson et files d'attente $M/M/s$
24. Quelques résultats d'irrationnalité et de transcendance

25. Représentation de surfaces algébriques
26. Représentations linéaires des groupes finis
27. Réseaux
28. Solutions périodiques d'équations différentielles
29. Stabilité de systèmes de boussoles
30. Théorème de Helly
31. Théorème de Krein-Milman
32. Théorème de représentation conforme de Riemann
33. Théorie classique des collisions
34. Théorie de la bifurcation
35. Transformation de Fourier dans un groupe abélien fini
36. Transport optimal

Mode d'emploi

La liste détaillée des sujets ainsi qu'une description du travail demandé à l'occasion de l'UE « TER » sont disponibles sur le site du Master M1 Mathématiques à l'adresse

`www-fourier.ujf-grenoble.fr/enseignement/`

On demande à chaque étudiant de choisir trois sujets, numérotés de 1 à 3 par ordre décroissant de préférence, et de communiquer ce choix à Laurence Garcia par mail `<Laurence.Garcia@ujf-grenoble.fr>` ou en passant au bureau 24, en tout cas

avant le vendredi 7 janvier 2011.

On rappelle qu'en fonction des choix des uns et des autres, un sujet pourra être affecté à un étudiant ne l'ayant pas sélectionné.

Université Joseph Fourier
UFR de Mathématiques

Master Mathématiques, Informatique
Année M1, majeure Mathématiques

Sujets de TER 2010-2011

1 À la découverte des immeubles de Tits

Comme leurs homonymes de la vie courante, les immeubles au sens de Tits ont des chambres et des appartements. Par contre, une de leurs particularités est que deux chambres d'un même immeuble sont toujours contenues dans un appartement. Ces objets ont été introduits par Jacques Tits pour étudier les groupes de façon géométrique.

Le but du stage sera de comprendre la définition géométrique et la définition algébrique de ces immeubles et de démontrer l'équivalence des deux définitions.

Prérequis

Des rudiments d'algèbre de L3 et de M1, et de la géométrie du plan.

Référence

D. Cartwright, *A brief introduction to buildings*, Contemporary Mathematics volume 206 (1997), pages 45-77.

2 Algèbres semi-simples

Une algèbre est *simple* si elle n'admet pas d'idéal bilatère non trivial, un prototype en est l'algèbre des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps donné. On étudiera plus généralement la notion de *semi-simplicité* d'une algèbre associative de dimension finie. On prouvera les théorèmes de structure de Wedderburn, Burnside, Frobenius–Schur, etc.

Cette théorie s'applique en particulier à la réduction des endomorphismes (décomposition de Dunford) et fournit un cadre naturel à l'étude des représentations des groupes finis.

Référence

Curtis-Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, chapitre 4.

3 Courbes algébriques planes

Le théorème de Bezout affirme que si C_1 et C_2 sont deux courbes projectives planes de degré d_1 et d_2 définies sur un corps algébriquement clos, sans composantes communes, alors le nombre de points d'intersection de C_1 et C_2 comptés avec leur multiplicité est égal à $d_1 d_2$.

Il s'agira de comprendre les hypothèses sous lesquelles ce résultat est vrai, en particulier ce que signifie prendre en compte les points à l'infini et compter les points avec leur multiplicité. On étudiera une ou plusieurs preuves du théorème ainsi que quelques exemples.

Références

Fulton, Algebraic curves, An introduction to algebraic geometry, 1969.

Perrin, Géométrie algébrique, une introduction, 1995.

Prérequis

Le cours d'Algèbre 1 du M1 et une absence d'aversion pour la géométrie, mais aucune formation particulière à la géométrie n'est nécessaire.

4 Dénombrement des arbres couvrants

La formule de Cayley donne le nombre d'arbres couvrants du graphe complet. Il existe de très nombreuses démonstrations de cette formule, faisant appel à des techniques très diverses.

Il s'agira d'étudier quelques-unes de ces approches, en particulier celles abordées dans le livre de Matousek et Nesetril. Toutes ces méthodes sont élémentaires et les connaissances requises ne dépassent pas l'algèbre linéaire de licence.

Référence

J. Matousek, J. Nesetril, Introduction aux mathématiques discrètes.

5 Files d'attente en temps discret

Les outils développés dans les modèles de files d'attente trouvent des applications dans des domaines très variés (combinatoire, longueur de la plus longue sous-suite croissante dans une permutation aléatoire, percolation orientée, etc.).

On étudiera le modèle de file d'attente en temps discret qui correspond un guichet

où le nombre de services maximal par unité de temps suit une loi géométrique de paramètre λ. Les clients arrivent au guichet à des instants entiers et le nombre de clients qui entrent dans la file à un instant donné suit une loi géométrique de paramètre μ.

Le but du TER sera de démontrer les versions discrètes des théorèmes de Burke et Pitman. Le théorème de Burke dit que, si $\lambda < \mu$, le nombre de clients sortant de la file d'attente à chaque instant suit aussi une loi géométrique. Si le temps le permet, on abordera certaines applications des techniques et des résultats de la théorie des files d'attente.

6 Forme d'une goutte d'eau

Quelle est la forme d'une goutte d'eau au repos ? Ce problème peut paraître simple si la goutte est en apesanteur mais il se complique dans le cas de contacts ou de flux d'air stationnaires.

Le but du stage est de comprendre la modélisation du problème et d'étudier les outils mathématiques en vue de sa résolution. Des simulations numériques pourront être envisagées.

7 Géométrie des surfaces

On commencera par étudier les trois surfaces modèles : le plan euclidien (courbure 0), le plan hyperbolique (courbure -1) et la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ (courbure $+1$). On verra ensuite comment construire d'autres surfaces via la théorie des groupes à partir des exemples fondamentaux précédents. Le stage se veut une initiation aux géométries non-euclidiennes.

Prérequis

Les cours de L3 de topologie, algèbre et calcul différentiel.

Référence

J. Stillwell, Geometry of surfaces, Springer.

8 Graphes aléatoires

Le graphe d'Erdős-Rényi de taille n est un graphe sur $V = \{1, \dots, n\}$, non orienté, tel que deux sommets i et j sont connectés par une arête avec probabilité $p = \lambda/n$.

Diverses propriétés de ce graphe aléatoire seront abordées, notamment l'apparition ou non d'une *composante géante* quand n tend vers l'infini, suivant la valeur de λ.

9 Inégalités de concentration en estimation non-paramétrique

Les inégalités de concentration contrôlent la déviation d'une fonction de variables aléatoires indépendantes, généralisant ainsi les inégalités connues pour la fonction somme. Sous certaines conditions, la variable aléatoire obtenue se concentre autour de son espérance ou de sa médiane. Ces inégalités sont devenues un outil standard d'analyse en statistique.

Il s'agira de comprendre l'approche différence de martingales pour établir des inégalités de concentration et de les utiliser en statistique non-paramétrique (statistique de Kolmogrov-Smirnov, estimation de la densité, etc.)

Référence

Devroye, L. Exponential inequalities in nonparametric estimation. Disponible sur le web à l'adresse `cg.scs.carleton.ca/%7eluc/spetses1991.pdf`.

10 Introduction à la théorie ergodique

La théorie ergodique s'est développée initialement dans le but de justifier rigoureusement un postulat de base de la mécanique statistique, portant sur l'égalité entre moyennes temporelles et moyennes d'ensembles. Cette branche des mathématiques étudie principalement le comportement en temps long des trajectoires d'un système dynamique possédant une mesure invariante.

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, et $T : X \to X$ une application mesurable préservant la mesure μ. Étant donné un point x dans X, un entier $N \geqslant 1$ et une application f dans $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, on définit la moyenne de l'observable f le long de la trajectoire issue de x par

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n x).$$

La théorème ergodique de Birkhoff (1931) affirme :

> *Pour μ-presque tout x dans X, la moyenne temporelle $F_N(x)$ converge lorsque N tend vers l'infini vers $f_*(x)$, où f_* appartient à $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$*

et vérifie les deux égalités $f_* \circ T = f_*$ *et*

$$\int_X f_* \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Si de plus l'application T *est ergodique, c'est-à-dire si elle ne possède pas de sous-ensemble invariant de mesure différente de* 0 *ou* 1*, alors* f_* *est constante et égale à* $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Il s'agira de se familiariser avec les concepts et les méthodes de la théorie ergodique, de comprendre les démonstrations des théorèmes fondamentaux de von Neumann et de Birkhoff et d'étudier quelques-unes de leurs conséquences. On pourra également considérer quelques exemples classiques de systèmes dynamiques ergodiques.

Références

V.I. Arnold et A. Avez. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris 1967.

P. Billingsley. *Ergodic Theory and Information*, Wiley, New York, 1965.

M. Reed et B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Volume 1 : Functional Analysis*, Academic Press, 1980.

11 Localiser les racines d'un polynôme par des méthodes hybrides

On souhaite localiser les racines complexes d'un polynôme à coefficients rationnels sans racines multiples, par des méthodes hybrides numériques-exactes. Ces racines sont aussi les valeurs propres complexes de sa matrice companion M. On peut donc appliquer à la matrice M des algorithmes numériques : par la méthode QR, on factorise M sous forme de Schur $M = P^{-1}SP$, où P est unitaire et S diagonale supérieure.

En approchant P par une matrice exacte P_0, on peut essayer de contrôler la localisation des valeurs propres de M à partir des coefficients diagonaux de S et de la taille des coefficients sous-diagonaux de $P_0 M P_0^{-1}$.

12 Loi généralisée des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite de variables aléatoires réelles méme si cette loi n'est pas exactement connue.

Pour tout $n \geqslant 1$, soit M_n le maximum de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi donnée. Un des résultats fondamentaux de la théorie est un résultat établi en 1928 par Fisher et Tippett qui, de façon analogue au théorème central limite, montre qu'on peut trouver des constantes de normalisation a_n strictement positives et b_n réelles, et une fonction de répartition H telles que, pour tout nombre réel x,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a_n(M_n - b_n) \leqslant x) = H(x).$$

Il s'agira de comprendre et d'analyser ce résultat.

Référence

M.R. Leadbetter, Georg Lindgren, Holger Rootzén. Extremes and related properties of random sequences and processes. Springer, 1983.

13 Méthodes de dénombrement

Nous nous intéresserons à quelques problèmes et méthodes de dénombrement (utilisation des fonctions multiplicatives, de l'analyse complexe, de la théorie des groupes finis par exemple). On pourra commencer par le problème qui consiste à dénombrer les décompositions d'un entier donné comme somme de deux carrés.

14 Méthode de Laplace et méthode de la phase stationnaire

La méthode de Laplace est une méthode pour l'évaluation numérique d'intégrales de la forme

$$\int_a^b \mathrm{e}^{zu(x)}\, v(x)\,\mathrm{d}x,$$

où u est une fonction deux fois dérivable, z est un nombre réel et les bornes a et b peuvent éventuellement être infinies, dans la limite $z \to +\infty$.

La méthode de la phase stationnaire s'intéresse au même problème quand z est un nombre imaginaire pur $z = \mathrm{i}t$ et on s'intéresse à la limite $t \to +\infty$.

On étudiera ces deux méthodes d'évaluation d'intégrales.

Référence

Claude Zuily et Hervé Queffelec, Éléments d'analyse pour l'agrégation.

15 Modèle auto-régressif

On considère le modèle auto-régressif linéaire (AR) en temps discret et à coefficients aléatoires

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n,$$

pour $n \geqslant 1$, où $(A_n, B_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ indépendante de X_0, vecteur aléatoire fixé dans $\mathbb{R}^d$. Ces modèles interviennent beaucoup en modélisation statistique, par exemple dans la modélisation des séries chronologiques (lorsque l'équation est scalaire, $d = 1$).

Il s'agira de comprendre les conditions assurant l'existence et l'unicité d'une solution stationnaire de l'équation. On regardera ensuite un cadre plus général traité dans l'article de Goldie donné en référence.

Prérequis

On demande de connaître les différents types de convergence d'une suite de variables aléatoires. La connaissance de la théorie des chaînes de Markov n'est pas indispensable mais par contre celle de l'espérance conditionnelle l'est.

Références

Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of non-negative infinitely divisible random variables. Adv. Appl. Prob. 11, 750-783.

Goldie, Ch. M. (1991). Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. Ann. Appl. Probab. Volume 1, Number 1, 126-166.

16 Nombres de Bernoulli et formule d'Euler-Mac Laurin

La formule d'Euler-Maclaurin, ou formule sommatoire d'Euler, relie sommes discrètes et intégrales. Elle fut découverte indépendamment par Leonhard Euler pour accélérer le calcul des limites de séries lentement convergentes et par Colin Maclaurin pour calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Les nombres de Bernoulli, quant à eux, forment une suite de nombres rationnels d'abord été étudiés par Jacques Bernoulli dans le but de trouver des formules exprimant les sommes $\sum_{k=1}^{m} k^n$ pour différentes valeurs de l'entier n. Ils apparaissent également dans de très nombreuses applications, depuis la formule d'Euler-Maclaurin jusqu'à l'approche par Kummer du dernier théorème de Fermat.

Le but sera d'étudier cette formule et cette suite de nombres.

Référence

Jean-Pierre Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, Presses universitaires de Grenoble.

17 Ondes progressives et systèmes de réaction-diffusion

Les systèmes de réaction-diffusion sont des équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires, qui interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes en chimie et en biologie notamment. On s'intéressera à une classe importante de solutions de ces systèmes, les *ondes progressives*, qui sont stationnaires dans un référentiel en translation uniforme. Ces solutions s'obtiennent en résolvant une équation ou un système d'équations différentielles ordinaires, dans lequel la vitesse de propagation, qui n'est pas connue a priori, intervient comme un paramètre.

On commencera par traiter en détail le cas d'une équation scalaire avec non-linéarité monostable ou bistable. Ce problème se ramène à l'étude d'un système dynamique dans le plan $\mathbb{R}^2$, pour lequel l'existence de solutions hétéroclines peut être obtenue par une méthode de tir. On pourra ensuite analyser, sur des exemples, des systèmes de réaction-diffusion plus complexes.

Références

D.G. Aronson et H.F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Advances in Mathematics **30** (1978), 33-76.

A.I. Volpert, V.A. Volpert et V.A. Volpert, *Traveling wave solutions of parabolic systems*, Translations of Mathematical Monographs **140**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

18 Opérateur $\overline{\partial}$ dans $\mathbb{C}$

Une méthode classique en analyse complexe pour résoudre un probléme posé dans le cadre holomorphe consiste à résoudre le même problème dans la classe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis à corriger la solution trouvée en résolvant une équation du type

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = f. \tag{S}$$

Il s'agira dans un premier temps d'étudier la résolubilité de l'équation (S) dans les ouverts de $\mathbb{C}$ et d'en déduire des démonstrations des théorèmes de Mittag-Leffler et de Weierstrass. On introduira ensuite la notion de domaine d'holomorphie et on prouvera grâce au théorème de Weierstass que tout domaine de $\mathbb{C}$ est un domaine d'holomorphie. Pour finir on essaiera d'élargir les problématiques précédentes au cas de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geqslant 2$.

Références

E. Ammar et E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini (2004).

L. Hörmander, *An introduction to complex analysis in several variables*, North Holland (1973).

19 Phénomène d'extension de Hartogs

Au début du vingtième siècle F. Hartogs s'est aperçu que toute fonction holomorphe définie au voisinage du bord du bidisque de $\mathbb{C}^2$ admet une extension holomorphe au bidisque tout entier. Ce résultat est faux en une variable puisque la fonction $z \mapsto 1/z$ est holomorphe au voisinage du bord du disque et n'admet pas d'extension même seulement continue au disque.

Il s'agira de prouver le résultat plus général suivant :

> *Si K est une partie compacte de $\mathbb{C}^n$ avec $n \geqslant 2$, dont le complémentaire est connexe, toute fontion holomorphe sur $\mathbb{C}^n \setminus K$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ tout entier.*

Pour cela on sera amené à étudier la résolubilité de l'équation de Cauchy-Riemann lorsque le second membre est à support compact.

Référence

L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, North Holland (1973).

20 Permutations aléatoires

Le classique problème des rencontres concerne le nombre de points fixes d'une permutation aléatoire. Une généralisation consiste à étudier la décomposition en cycles d'une telle permutation. On sera amené au passage à considérer divers algorithmes permettant de générer des permutations aléatoires. On pourra éventuellement compléter cette étude par divers problèmes d'optimisation liés à ces

permutations (problème des secrétaires) et des applications en génétique (formule d'échantillonnage d'Ewens). Certains des résultats pourront aussi (mais pas obligatoirement) être illustrés par des simulations sur ordinateur.

Prérequis

Le cours de probabilités du premier semestre.

Référence

R. Arratia, A.D. Barbour, S. Tavaré, Logarithmic combinatorial structures (essentiellement le chapitre 1).

21 Problème de Galois inverse

Il s'agit de savoir si un groupe fini donné est le groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ ou non. On propose une première approche, élémentaire et dans le cas de certains groupes particuliers, de cette question encore ouverte à ce jour. On s'intéressera notamment au cas des groupes abéliens, des groupes symétriques et de quelques groupes simples.

Prérequis

L'algèbre vue en L3, en particulier la théorie de Galois.

22 Problème des moments

Soit $(m_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle que $m_0 = 1$. À quelle condition (m_n) est-elle la suite des moments d'une variable aléatoire réelle ? d'une variable aléatoire positive ? d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$? Lorsque c'est le cas, la loi de cette variable aléatoire est-elle déterminée par les moments ? L'objet du TER est d'aborder la réponse à ces questions.

Prérequis

Théorie de la mesure, fonctions holomorphes (un peu), transformée de Fourier (un peu).

Référence

William Feller, An introduction to probability theory and its applications, Volume 2, Wiley (1971).

23 Processus de Poisson et files d'attente $M/M/s$

Il s'agit d'étudier les files d'attente dont les temps de service et les temps inter-arrivées suivent des lois exponentielles. Les techniques markoviennes permettent alors d'analyser complètement le comportement de ces files. Ce sujet devrait intéresser en priorité les étudiant(e)s suivant le cours de *Processus stochastiques* du second semestre.

Prérequis

Le cours de Probabilités du premier semestre

Références

La bibliographie est vaste. Pour avoir une idée du sujet, on pourra consulter :

J.-F. Delmas, B. Jourdain, Modèles aléatoires (chapitres 8 et 9).

M. Roussignol, D. Flipo, Files d'attente et fiabilité, cours disponible en ligne à l'adresse `daniel.flipo.free.fr/cours/ffa.pdf`.

24 Quelques résultats d'irrationnalité et de transcendance

Après avoir étudié quelques démonstrations classiques, comme celles du fait que les nombres e et π sont transcendants, on se penchera sur le cas des nombres $\zeta(2p)$ et de $\zeta(3)$.

Références

S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag.

F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$. Bulletin London Mathematical Society 11 :3 (1979), 268-272.

Sur le web : `www.math.u-bordeaux1.fr/%7emolin/notes/zeta_3.pdf`

25 Représentation de surfaces algébriques

Une équation algébrique étant donnée, on se demande comment tracer l'ensemble qui lui est associé. Les méthodes pour réaliser ce programme peuvent s'appuyer sur l'utilisation du théorème des fonctions implicites mais aussi faire appel à des techniques de factorisation de polynômes.

Le but de ce projet est de comprendre les différents outils utilisables pour résoudre ce problème et surtout d'étudier leurs avantages et leurs limitations. Le travail pourra être illustré par le développement d'un module de tracé de surfaces algébriques basé, par exemple, sur le logiciel `Maple`.

26 Représentations linéaires des groupes finis

Il s'agit d'une introduction à la théorie des représentations linéaires des groupes finis.

27 Réseaux

Nous étudierons quelques propriétés des réseaux, c'est-à-dire des sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$, en lien avec la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Nous verrons que les réseaux sont des copies de $\mathbb{Z}^n$, et nous examinerons quelques résultats sur la répartition des points d'un réseau.

Référence

Tosel, Réseaux et théorèmes de finitude, RMS 2004-2005.

Prérequis

Cours d'Algèbre 1 du M1.

28 Solutions périodiques d'équations différentielles

On démontrera le théorème de Poincaré-Bendixon et on l'appliquera à quelques exemples classiques. Une mise en œuvre sur machine en guise d'illustration sera la bienvenue.

Références

Ferdinand Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems.*

M.W. Hirsch, S. Smale et R.L. Devaney, *Differential equations, dynamical systems, An introduction to chaos.*

29 Stabilité de systèmes de boussoles

En présence d'un champ magnétique extérieur fixé, une boussole s'oriente suivant la direction de ce champ, par contre, plusieurs boussoles rassemblées sur un réseau sont sensibles à la présence de leurs voisines.

Le but de ce TER est comprendre les équations du mouvement d'une boussole puis d'un système de plusieurs boussoles. L'enjeu serait, pour des systèmes à trois boussoles, d'exhiber les configurations stables et instables et éventuellement d'effectuer des simulations numériques en vue d'illustrer des résultats théoriques.

30 Théorème de Helly

Il s'agit d'étudier les sous-ensembles convexes d'un espace vectoriel, éventuellement de dimension infinie. On s'intéressera au théorème de Helly, qui affirme que si on se donne une famille finie d'au moins $n + 2$ parties convexes de $\mathbb{R}^n$ telle que l'intersection de $n+1$ quelconques d'entre ces parties est non vide, alors l'intersection de toutes est non-vide.

Référence

Berger, M. : *Géométrie*, édition Cedic/Fernand Nathan, Paris 1978 (volume 3, section 11.7).

31 Théorème de Krein-Milman

Il s'agit d'étudier les sous-ensembles convexes d'un espace vectoriel, éventuellement de dimension infinie. On s'intéressera au théorème de Krein-Milman, qui affirme que tout ensemble convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Référence

Berger, M. : *Géométrie*, édition Cedic/Fernand Nathan, Paris 1978 (volume 3, section 11.6).

32 Théorème de représentation conforme de Riemann

Tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ distinct de $\mathbb{C}$ est biholomorphiquement équivalent au disque unité. On introduira les notions essentielles à une preuve de ce théorème et on en donnera quelques exemples (représentation d'un carré sur le disque, etc.)

Références

H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.

W. Rudin, *Real and complex analysis*, Mc Graw-Hill.

33 Théorie classique des collisions

La théorie des collisions étudie le mouvement d'un ensemble de particules en interaction dans le cas où ces particules sont suffisamment éloignées les unes des autres et lorsque le temps devient assez grand pour qu'on puisse négliger leur interaction dans cette limite. On cherche alors à établir une correspondance entre les « états entrants » (les positions et les vitesses des particules dans un passé lointain) et les « états sortants » (les positions et les vitesses dans un futur éloigné). Cette correspondance est établie par la « matrice de collision », une quantité accessible expérimentalement qui contient des informations sur la nature des forces d'interaction en jeu.

Il s'agira de se familiariser avec les principaux concepts de la théorie des collisions en étudiant le cas particulièrement simple de deux particules classiques dans $\mathbb{R}^3$ dont l'interaction est décrite par un potentiel invariant par translation et par rotation. On définira dans ce cadre les notions de paramètre d'impact, d'angle de diffusion et de section efficace. On calculera en particulier la section efficace différentielle et totale pour quelques potentiels classiques, dont le potentiel coulombien (formule de Rutherford). Une ouverture vers la théorie relativiste, ou vers la théorie cinétique (équation de Boltzmann) est envisageable.

Références

L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, MIR, Moscou, 1982.

R.G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, Springer, 1982.

34 Théorie de la bifurcation

De façon générale, la théorie de la bifurcation étudie et classifie les changements qualitatifs qui se produisent dans un système dynamique lorsqu'on varie un paramètre de ce système. Il s'agira d'étudier le cas d'une équation différentielle ordinaire de la forme

$$x'(t) = f(x(t), \lambda) \tag{S}$$

pour t dans $\mathbb{R}$, où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs régulier dépendant d'un paramètre λ réel. On supposera que $f(0,0) = 0$, de sorte que l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre du système (S) lorsque $\lambda = 0$, et on étudiera la dynamique de ce système au voisinage de l'origine lorsque λ est proche de zéro.

On passera en revue les scénarios les plus fréquents (bifurcation selle-noeud, bifurcation fourche, bifurcation de Hopf), et on s'efforcera aussi de comprendre pourquoi l'étude de ces bifurcations locales permet d'aborder la dynamique complexe de certains systèmes « chaotiques ».

Références

J. Guckenheimer et Ph. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Applied mathematical sciences **44**, Springer 1983.

D. Ruelle, *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*, Academic Press 1989.

J.D. Crawford, *Introduction to bifurcation theory*, Rev. Mod. Phys. **63** (1991), 991-1037.

35 Transformation de Fourier dans un groupe abélien fini

Il s'agit d'étudier la transformation de Fourier discrète et de certaines de ses applications. Cette étude théorique sera complétée par un algorithme de calcul et une éventuelle mise en œuvre sur machine.

Référence

Gabriel Peyré, *L'algèbre discrete de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.

36 Transport optimal

L'histoire du transport optimal commence avec Gaspard Monge au dix-huitième siècle et son fameux *problème des déblais et remblais* : Monge demande quelle est la façon optimale de transporter un mètre cube de sable pour combler un trou d'un mètre cube. La formulation moderne du problème est la suivante. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur un espace métrique (X, δ), disons pour simplifier un espace euclidien. On demande s'il existe une application mesurable $T : X \to X$ telle que $T\mu = \nu$ et telle que T minimise

$$\int_X \delta(x, Sx)^2 \, \mathrm{d}\mu(x),$$

parmi toutes les applications mesurables $S : X \to X$ telles que $S\mu = \nu$. Très récemment, le transport optimal s'est avéré utile en analyse, dans l'étude des équations aux dérivées partielles, en géométrie et dans l'étude des systèmes dynamiques. Le but du stage sera d'établir des propriétés élémentaires du transport optimal et d'en étudier quelques exemples.

Prérequis

Cours de théorie de la mesure de L3 et rudiments d'analyse fonctionnelle de M1.

Référence

C. Villani, *Topics in optimal transportation.*